

④ (a) sea $f(z) = z^{-2+i}$, considerando para su definición $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.

i) Calcular $\int_C f(z) dz$, siendo C la semicircunferencia

$x^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido antihorario desde i hasta $-i$.

ii) Calcular $\int_{\gamma} f(z) dz$, siendo γ la porción de la elipse

$x^2 + 4y^2 = 4$ contenida en el semiplano $\{(x, y) : x \leq 0\}$ recorrida desde $(0, -1)$ hasta $(0, 1)$ en ese orden.

(b) Sea $f(z)$ una función entera tal que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(2) = 4$. Sea $r > 0$, $r \neq 2$. Consideremos las curvas

$C_r : \{z : |z| = r\}$ y la siguiente función

$$F(r) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_r} \left(z + (z-2)^2 - \frac{3}{z^2(z-2)} \right) f(z) dz$$

i) Calcular $F(1)$ y $F(3)$

ii) Es cierto que $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = 3$? Justificar la respuesta.