Matemáticas Especiales I - Primer Parcial - Primera fecha 5 11 13.

Atención: Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

1. (a) Sea $A = \left\{ z : \cos\left(\frac{\pi}{z^2+1}\right) = 1 \right\}$. Hallar los elementos de A y comprobar que son todos imaginarios puros.

   (b) Sea ahora $B = A \cup \{ z : |z| \leq 1 \}$. Hallar los puntos de acumulación. ¿Es cerrado?

   (c) Sea ahora $D = A \cup \{ z : |z| < 2 \}$. Hallar el interior y la frontera de D. ¿Es abierto?

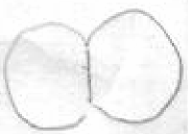
2. (a) Dada la función $f(x+iy) = x^2 - 2y^2 - x + i(4xy - |y|)$, determinar para qué valores de z existe $f'(z)$ y encontrar su expresión. ¿Es $f(z)$ holomorfa en algún punto?

   (b) Consideremos el corte principal para definir la raíz $\sqrt[3]{w}$. Dada la función multievaluada $f(z) = \left[\sqrt[3]{2iz+i} - 1\right]^{-1}$, hallar el dominio de definición y derivabilidad para cada una de las posibles ramas de $f(z)$.

3. (a) Hallar la imagen por $w(z) = \frac{iz}{z+1}$ de las siguientes curvas:

   C_1: $y = x$, $-\infty < x \leq 0$

   C_2: $y = 0$, $x \geq 0$



   i) ¿Qué ángulo determinan entre sí las tangentes a las curvas en $z = 0$?

   ii) Sin hacer cálculos, qué ángulo forman entre sí las tangentes a las curvas imágenes en $w(0) = 0$? Justificar la respuesta.

   (b) Encontrar la imagen de la región $R = \{ z = x+iy,\ -1/2 < x < 1,\ 0 < y < \pi \}$ mediante la transformación $w(z) = \operatorname{sh} z$. Mostrar las partes correspondientes a la frontera. Es inyectivo el mapeo?