

Apellido y Nombre: Sarmiento Regina

Carrera: Lic. Astronomía

Nro de alumno: 6907/4

I) Polinomios

1. Sea K cuerpo conmutativo y sean $a \in K$, $p(x) \in K[x]$ y $q(x) \in K[x]$. Demostrar que:
 a es raíz de $p(x)$ y de $q(x)$ si y sólo si a es raíz de $(p(x), q(x))$.
2. Construir un polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, mónico, de grado 4, que tenga a i como raíz doble, que al dividirlo por $x + 1$, su resto sea 0 y que evaluado en 0 valga 2. Es único?
3. Sea $p(x) = 6x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio con coeficientes reales. Sabiendo que $z = 2i$ es raíz doble de $p(x)$, hallar las restantes raíces y factorizar $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

II) Matrices- Determinantes - Sistemas de ecuaciones

1. Hallar $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $(E_1(3))^{-1} \cdot E_1^3(4) \cdot A = I$

Recordar que $E_1(3)$ es la matriz elemental que multiplica la fila 1 de la identidad por 3 y $E_1^3(4)$ es la matriz elemental que suma a la fila 3 de la identidad la fila 1 multiplicada por 4.

2. Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 3z + 4w = 5 \\ y + z - 2w = 1 \\ 2x + 2y + 8z + 4w = 12 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

- (a) Expresarlo en forma matricial
- (b) Realizando operaciones elementales determinar el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la ampliada.
- (c) Justificar usando el teorema de Rouché Frobenius qué tipo de solución tiene el sistema.
- (d) Dar la solución.

3. Se dice que $\lambda \in K$ es un autovalor de una matriz A , si se cumple que $\det((A - \lambda I)) = 0$.

Probar que si λ es autovalor de A y $\alpha \in K$, entonces $\lambda + \alpha$ es autovalor de la matriz

$A + \alpha I$, donde I es la identidad de igual orden que A .

III) Espacios vectoriales y Estructuras algebraicas

1. Sea $(G, *)$ un grupo. Probar que dado $b \in G$, b fijo, los conjuntos $S_b = \{a \in G : a * b = b * a\}$ y $R_b = \{b * a * b^{-1} : a \in G\}$ son subgrupos de $(G, *)$.
2. Mostrar que $\{(1, 0, 0), (0, 2, 1)\}$ es base del espacio $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z\}$ sobre \mathbb{R} .
3. Analizar si el conjunto $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : a + d = 0 \right\}$ es subespacio del \mathbb{R} -espacio vectorial $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.